האינטרגל לפי רימן

# הגדרה

בהינתן קטע סגור ניתן לחלקו לn קטעים. נסמן בT את החלוקה: ונסמן ב, את אורכי הקטעים.

# הגדרה

בהינתן קטע סגור וחלוקה T, נקרא פרמטר החלוקה לגודל .

# הגדרה

תהי f פונ' המוגדרת בקטע הסגור ותהי T חלוקה של הקטע. עבור כל תת קטע נבחר נק' ונבנה סכום סופי מהצורה . סכום זה נקרא סכום רימן של בקטע והוא תלוי בחלוקה T ובקב' הנק' .

# הגדרה

פונ' נקראת אינטגרבילית רימן בקטע אם קיים הגבול:  
והוא בלתי תלוי בבחירת החלוקות T ובבחירת הנק' כל עוד .

נסמן את הגבול הזה ב ונקרא לו האינטגרל המסויים של בקטע . לa,b נקרא גבולות האינטגרציה.

האינטגרל לפי דרבו

# הגדרה(שקולה לזו של רימן)

תהי f פונ' חסומה בקטע וT חלוקה של הקטע. נסמן

# הגדרה

– הסכום העליות של דרבו.  
 – הסכום העליות של דרבו.

# הגדרה

– האינטגרל העליון של דרבו.  
 – האינטגרל התחתון של דרבוץ  
תמיד מתקיים

# הגדרה

פונ' נקראת אינטגרבילית לפי דרבו בקטע אם . נסמן את הערך המשותף

# משפט

אם אינה חסומה בקטע אזי היא אינה אינטגרבילית בו.

# שאלה

חסומה ⇦ אינט'?

## תשובה

לא! לדוגמה . לכל חלוקה T שניקח אז הגבול לא קיים ולכן האינטגרל לפי רימן לא מוגדר. כלומר ראינו פונ' חסומה בקטע שהיא לא אינט'.

# תרגיל

קבעו האם אינטגרבילית בקטע ?

## פתרון

לא! היא לא חסומה ולכן אינה אינטגרבילית.

# משפט

אם הפונ' רציפה למקוטעין בקטע אזי אינטגרבילית בקטע.

# תרגיל

חשב ע"פ הגדרה ע"פ דרבו

## פתרון

נבחר

# הגדרה

פונ' מוגדרת וחסומה בקטע נקראת רציפה למקוטעין אם יש לה לכל היותר מספר סופי של נק' אי רציפות, וכולן נק' אי רציפות מסוג ראשון.

# תרגיל

חשב

## פתרון

נחשב גם לפי דרבו:

תכונות ושימושי של האינטגרל המסויים

# משפט

אם פונ' אינטגרביליות בקטע אזי

# תרגיל

הוכח

## פתרון

נחפש את נקודות הקיצון של כדי לחסום אותה.  
ולכן

# תרגיל

הוכח:

## פתרון

ולכן היא נקודת מינימום בקטע (למרות שהיא נקודת פיתול לקטעים מהצורה ) כי היא עולה לכל

מאחר וf מקבלת את הערך 0 בנק' המינימום שלה, אז בכל נק' אחרת בקטע ולכן האי שוויון מתקיים.

# מסקנה מהמשפט

אם רציפה בקטע (ולכן אינט' בו) ומתקיים אזי  
ומכאן

מתוך משפט ערך הביניים קיימת נק' כך ש. לערך זה קוראים הערך הממוצע של בקטע .

# תרגיל

חשב את הערך הממוצע של בקטע

## פתרון